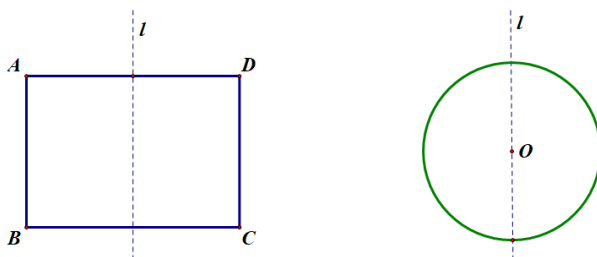


第2讲轴对称初步

一、轴对称图形

如果一个平面图形沿 某一条直线 折叠，直线两旁的部分能够 互相重合，这个图形就叫做 轴对称图形。这条直线就是它的 对称轴。这时我们也说这个图形关于这条直线(或轴)对称。如下面的矩形 $ABCD$ 、圆 O 都是轴对称图形。



🧠 举个“栗”子

📊 栗子1

1. 在以下绿色食品、回收、节能、节水四个标志中，是轴对称图形的是（ ）。



【备注】判断轴对称图形，基础题，中考第4题常考题型

【答案】A

【解析】A．是轴对称图形，故A符合题意；

B．不是轴对称图形，故B不符合题意；

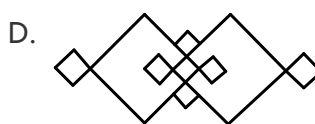
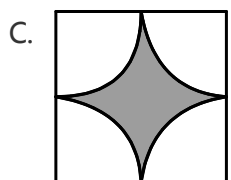
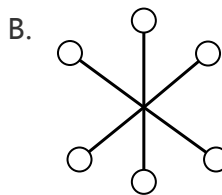
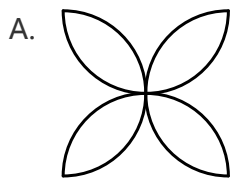
C．不是轴对称图形，故C不符合题意；

D．不是轴对称图形，故D不符合题意。

故选A。

【标注】【知识点】轴对称图形的定义

2. 以下图形中对称轴的数量小于3的是（ ）。



【备注】 数对称轴问题，比较基础，可以带学生画一下常见图形的对称轴

【答案】 D

【解析】 A. 共有4条对称轴；

B. 共有6条对称轴；

C. 共有4条对称轴；

D. 只有2条对称轴.

【标注】 【能力】分析和解决问题能力

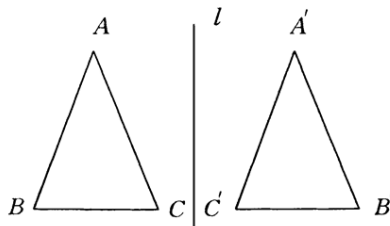
【知识点】轴对称图形的定义

二、轴对称

1. 定义

把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形 **重合**，那么就是说这两个图形 **关于这条直线（成轴）对称**，这条直线叫做 **对称轴**，折叠后重合的点是对应点，叫做 **对称点**。

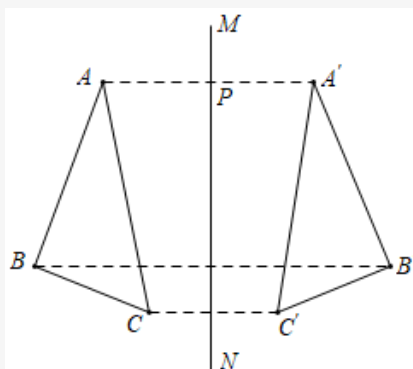
如下图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称， l 叫做对称轴。 A 和 A' ， B 和 B' ， C 和 C' 是对称点。



2. 性质

图形	性质
	①关于某条直线对称的两个图形是 全等形 . ②对称轴是任何一对对应点所连线段的 垂直平分线 . ③两个图形关于某条直线对称，如果他们的对应线段延长线相交，那么交点在 对称轴 上 .

【备注】



如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.

类似地，轴对称图形的对称轴，是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.

总结如下：

- ①关于某条直线对称的两个图形是全等形.
- ②对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.
- ③两个图形关于某条直线对称，如果他们的对应线段延长线相交，那么交点在对称轴上 .

3. 作图

图形	画法
	①过点 A 画直线 l 的 垂线，垂足为 O，在垂线上截取 $OA' = OA$，A' 就是点 A 关于直线 l 的对称点； ②同理，分别画出点 B，C 关于直线 l 的对称点 B'，C' ③连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，则 $\triangle A'B'C'$ 即为所求 .

举个“栗”子

栗子2

3. 下列说法：

- ①关于某条直线对称的两个三角形是全等三角形
 - ②两个全等的三角形关于某条直线对称
 - ③到某条直线距离相等的两个点关于这条直线对称
 - ④如果图形甲和图形乙关于某条直线对称，则图形甲是轴对称图形，其中，正确说法的个数是（ ）.
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【备注】 关于轴对称概念、性质的辨析，注意轴对称一定全等但全等不一定轴对称

【答案】 A

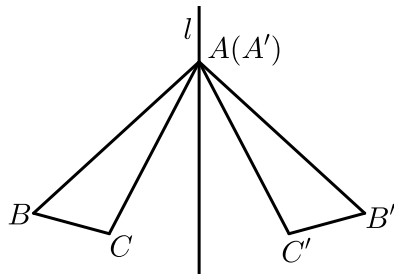
【解析】 ①关于某条直线对称的两个三角形是全等三角形，原说法正确；
 ②两个全等的三角形不一定关于某条直线对称，原说法错误；
 ③对应点的连线与对称轴的位置关系是互相垂直，且到这条直线距离相等的两个点关于这条直线对称，原说法错误；
 ④如果图形甲和图形乙关于某条直线对称，则图形甲不一定是轴对称图形，原说法错误．正确的说法有1个．
 故选：A．

【标注】 【知识点】判断是否为成轴对称图形

栗子3

4. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，下列结论中正确的有（ ）．

- ① $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，② $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ，③直线 l 垂直平分 CC' ，④直线 BC 和 $B'C'$ 的交点不一定在直线 l 上．



- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

【备注】 辨析题，与图形结合，按照性质解题即可

【答案】B

【解析】∵题中的图形是轴对称图形，

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C',$$

$$\therefore \angle BAC = \angle B'A'C', \text{ 故①②正确；}$$

由对称轴的性质知，对称轴垂直平分对应点连线，并且如果对应线段相交或延长线相交，则交点必在对称轴上，故③正确，④不正确，

因此①②③正确．

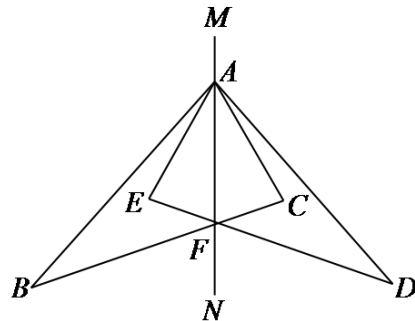
故选B．

【标注】【知识点】轴对称的性质

【知识点】轴对称的定义

栗子4

5. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 关于直线 MN 对称， $\angle B = 21^\circ$ ， $\angle C = 59^\circ$ ，则 $\angle EAD = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【备注】利用全等性质解题，对应边、角均相等

【答案】 100°

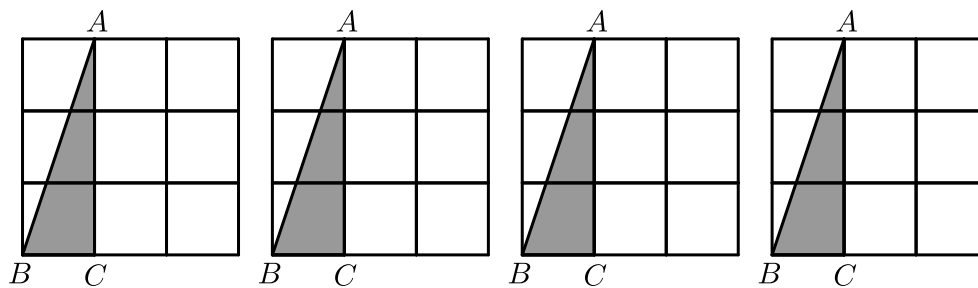
【解析】∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 关于直线 MN 对称，

$$\therefore \angle EAD = \angle CAB = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 21^\circ - 59^\circ = 100^\circ .$$

【标注】【知识点】其它翻折问题

栗子5

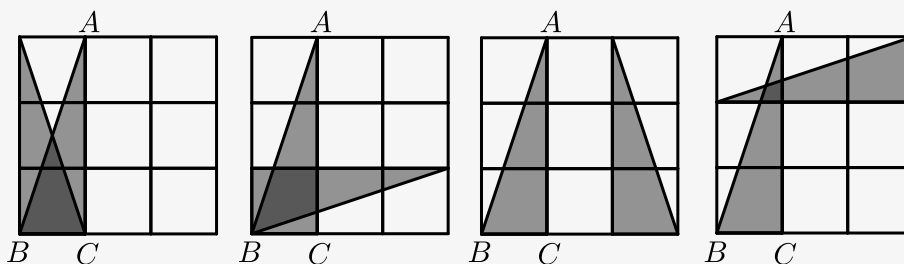
6. 如图，在 3×3 的正方形格纸中，格线的交点称为格点，以格点为顶点的三角形称为格点三角形，图中 $\triangle ABC$ 是一个格点三角形，在每张图中画出一个与 $\triangle ABC$ 成轴对称的格点三角形，并将所画三角形涂上阴影．



【备注】作图题，题目有一定难度，要考虑到对称轴为对角线的情况

【答案】画图见解析。

【解析】

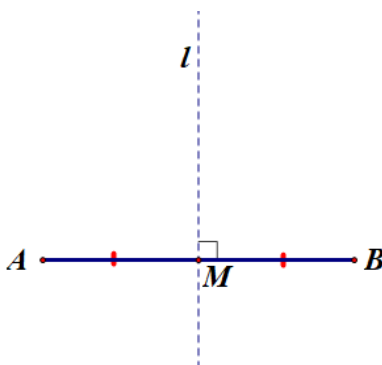


【标注】【知识点】作轴对称变换

三、垂直平分线

1. 定义

定义：经过线段 中点 并且 垂直 于这条线段的直线，叫做这条线段的 垂直平分线。

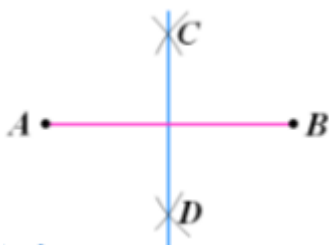


如图，直线 $l \perp AB$ 于点 M ，且 M 为 AB 的中点，则直线 l 是线段 AB 的垂直平分线。

2. 作图

- ①分别以点 A 和点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于 C, D 两点；
- ②作直线 CD 。

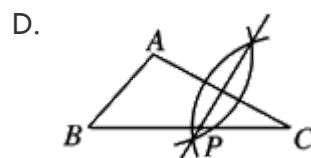
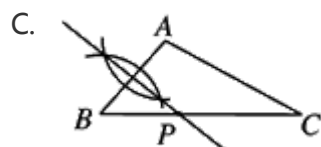
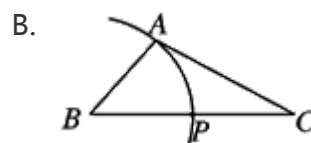
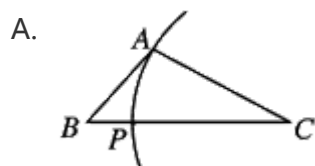
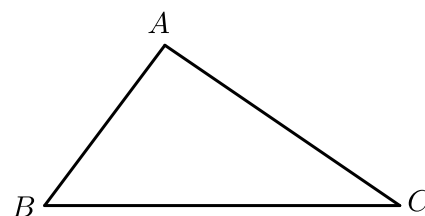
CD 就是所求作的直线．



🧠 举个“栗”子

栗子6

7. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AC < BC$ ，如果用尺规作图的方法在 BC 上确定一点 P ，使 $PA + PC = BC$ ，那么符合要求的作图痕迹是（ ）．



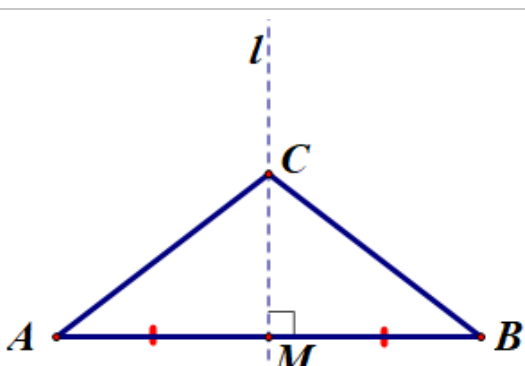
【备注】垂直平分线的作图题，结合题意做 AB 边的垂直平分线即可
可以继续提问 $PB + PC = BC$ ，该如何作图

【答案】 C

【解析】要使 $PA + PC = BC$ ，
需要 $PA = PB$ ，
图C中，点 P 在 AB 的垂直平分线上，
满足题意．

【标注】【知识点】作线段的垂直平分线

3. 性质

性质	垂直平分线上的点与这两条线段两个 <u>端点</u> 的 <u>距离相等</u>
	如图，已知直线 l 是线段 AB 的垂直平分线，点 C 是直线 l 上的一点，则 $AC = BC$ 。
	书写： $\because$ 点 C 在线段 AB 垂直平分线 l 上 $\therefore AC = BC$ 。

【备注】【证明】：

已知：如图， $MN \perp AB$ ，垂足为 C ，且 $AC = CB$

求证： $PA = PB$

证明：

$\because MN \perp AB$

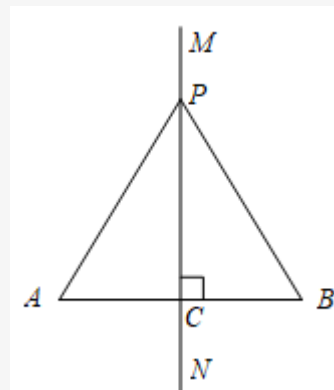
$\therefore \angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$

在 $\triangle PAC$ 和 $\triangle PBC$ 中

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle PCA = \angle PCB \\ PC = PC \end{cases}$$

$\therefore \triangle PAC \cong \triangle PBC (SAS)$

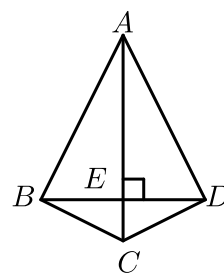
$\therefore PA = PB$



🍎 举个“栗”子

栗子7

8. 如图， AC 垂直平分 BD ，垂足为 E ，连接 AB ， AD ， BC ， CD ，下列结论不一定成立的是（ ）。



A. $AB = AD$

B. AC 平分 $\angle BCD$

C. $AB = BD$

D. $\triangle BEC \cong \triangle DEC$

【备注】直接考察其性质，更多与全等结合，有一定综合性

【答案】 C

【解析】 $\because AC$ 垂直平分 BD ,

$$\therefore AB = AD, BC = CD,$$

$$\therefore AC \text{ 平分 } \angle BCD, EB = DE,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle DCE,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 和 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中,

$$\begin{cases} BE = ED \\ BC = CD \end{cases}$$

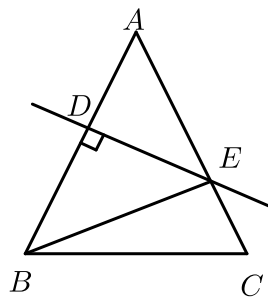
$$\therefore \text{Rt}\triangle BCE \cong \text{Rt}\triangle DCE \text{ (HL)},$$

故选: C.

【标注】【知识点】HL; 线段的垂直平分线的性质定理

栗子8

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, DE 是 AB 的垂直平分线, 且分别交 AB 、 AC 于点 D 和 E , $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, 则 $\angle EBC$ 等于 _____ 度.



【备注】与角度相关, 结合垂直平分线得到相等的角, 再利用内角和外角和计算

【答案】 20

【解析】 根据三角形内角和定理求出 $\angle ABC$, 根据线段垂直平分线的性质得到 $EA = EB$, 得到 $\angle EBA = \angle A = 50^\circ$, 结合图形计算, 得到答案.

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle A - \angle C = 70^\circ,$$

$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore EA = EB,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle A = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ,$$

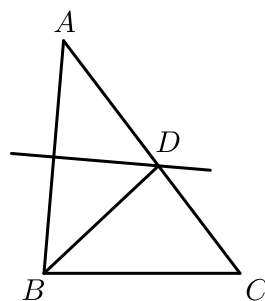
故选：20．

点评：本题考查的是线段垂直平分线的性质，掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键．

【标注】【知识点】线段的垂直平分线的性质定理

栗子9

10. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $AC = 6$ ， $BC = 4$ ，边 AB 的垂直平分线交 AC 于点 D ，则 $\triangle BDC$ 的周长是（ ）．



A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

【备注】与周长相关，先把周长分解成三条线段的和，再利用性质得到相等的线段，转化为已知长度

【答案】C

【解析】 $\because$ 边 AB 的垂直平分线交 AC 于点 D ，

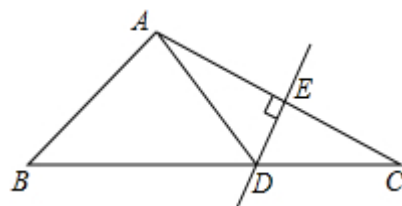
$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \triangle BDC \text{ 的周长} = DB + BC + CD,$$

$$\therefore \triangle BDC \text{ 的周长} = AD + BC + CD = AC + BC = 6 + 4 = 10.$$

【标注】【知识点】线段的垂直平分线的性质定理

11. 如图， DE 是 AC 的垂直平分线， $AE = 3\text{cm}$ ， $\triangle ABD$ 的周长为 13cm ，则 $\triangle ABC$ 的周长为 _____ cm ．



【备注】第10题的拓展，先利用已知三角形的周长得到线段和的关系，再进行转化计算

【答案】19

【解析】 $\because \triangle ABC$ 中， DE 是 AC 的中垂线，

$$\therefore AD = CD, AE = CE = \frac{1}{2}AC = 3\text{cm},$$

$$\therefore \triangle ABD \text{的周长} = AB + AD + BD = AB + BC = 13 \text{①},$$

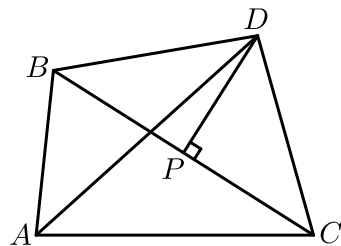
$$\text{则} \triangle ABC \text{的周长} = AB + BC + AC = AB + BC + 6 \text{②},$$

$$\text{把②代入①得} \triangle ABC \text{的周长} = 13 + 6 = 19\text{cm}.$$

【标注】【知识点】线段的垂直平分线的性质定理

栗子10

12. 如图， $\triangle ABC$ 中， BC 的垂直平分线 DP 与 $\angle BAC$ 的角平分线相交于点 D ，垂足为点 P ，若 $\angle BAC = 84^\circ$ ，则 $\angle BDC = ()$.



A. 84°

B. 96°

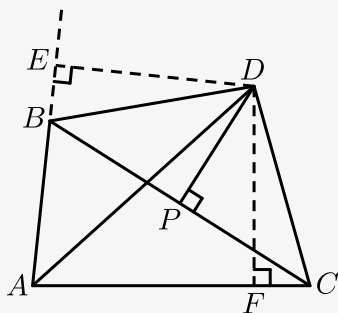
C. 100°

D. 不能确定

【备注】角平分线与垂直平分线的综合题，需要做辅助线，再利用四边形内角和求解

【答案】B

【解析】过点 D 作 $DE \perp AB$ ，交 AB 延长线于点 E ， $DF \perp AC$ 于 F .



$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$$\therefore DE = DF.$$

$\because DP$ 是 BC 的垂直平分线，

$$\therefore BD = CD .$$

在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 与 $\triangle DFC$ 中 ,

$$\begin{cases} DB = DC \\ DE = DF \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle DEB \cong \text{Rt}\triangle DFC (\text{HL}) ,$

$$\therefore \angle BDE = \angle CDF ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle EDF .$$

$$\therefore \angle DEB = \angle DFC = 90^\circ ,$$

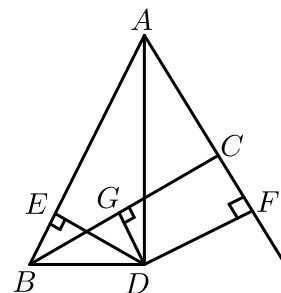
$$\therefore \angle EAF + \angle EDF = 180^\circ .$$

$$\therefore \angle BAC = 84^\circ ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle EDF = 96^\circ .$$

【标注】【知识点】线段的垂直平分线的性质定理

13. 已知:如图, $\angle BAC$ 的角平分线与 BC 的垂直平分线 DG 交于点 D , $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为 E, F .



(1) 求证: $BE = CF$.

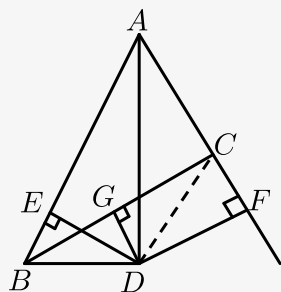
(2) 若 $AF = 5$, $BC = 6$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【备注】角平分线与垂直平分线综合的解答题, 注意书写规范问题

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 16 .

【解析】(1) 连结 CD ,



$\because D$ 在 BC 的中垂线上

$$\therefore BD = CD$$

$\because DE \perp AB, DF \perp AC$

AD 平分 $\angle BAC$

$$\therefore DE = DF$$

$$\angle BED = \angle DCF = 90^\circ$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 和 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} DE = DF \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CDF (\text{HL})$,

$$\therefore BE = CF.$$

(2) 由(HL)可得, $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ADF$,

$$\therefore AE = AF = 5,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{的周长} = AB + BC + AC,$$

$$= (AE + BE) + BC + (AF - CF)$$

$$= 5 + 6 + 5$$

$$= 16.$$

【标注】【知识点】三角形的周长与面积问题

【知识点】线段的垂直平分线的性质定理

【知识点】角分线性质定理

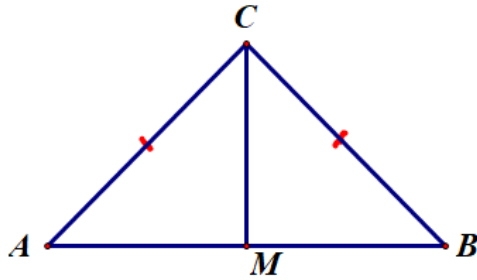
【知识点】HL

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】对应边

【能力】推理论证能力

4. 判定

判定	到线段两个端点 <u>距离相等</u> 的点，在这条线段的垂直平分线上。
	如图， $AC = BC$ ，点 M 是线段 AB 的中点，则 $CM \perp AB$ ，即点 C 在线段 AB 的垂直平分线上。
	书写： $\because AC = BC, AM = BM$ $\therefore CM \perp AB$
	推论：若 $AC = BC, AD = BD$ ，则直线 CD 为线段 AB 的 <u>垂直平分线</u> 。

【备注】【证明】：

已知：如图， $PA = PB$

求证：点 P 在线段 AB 的垂直平分线上

证明：

过点 P 作 $PC \perp AB$ 于点 C ，则 $\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$

在 $\text{Rt}\triangle PCA$ 和 $\text{Rt}\triangle PCB$ 中，

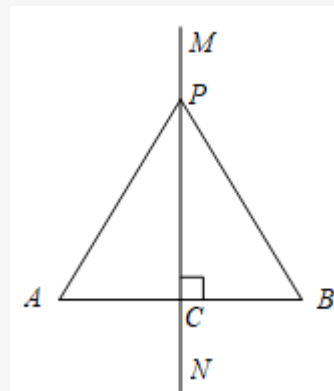
$\because PA = PB, PC = PC$

$\therefore \text{Rt}\triangle PCA \cong \text{Rt}\triangle PCB (HL)$

$\therefore AC = BC$

又 $PC \perp AB$

$\therefore$ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上



【归纳】：

性质定理：

点 P 在线段 AB 的垂直平分线上

线段垂直平分线上的点到
这条线段两个端点的距离相等

$PA = PB$

判定定理：

$PA = PB$

到一条线段两个端点的距离相等的点
在这条线段的垂直平分线上

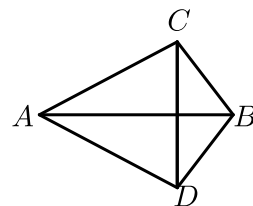
点 P 在线段 AB 的垂直平分线上



举个“栗”子

栗子11

14. 如图, $AC = AD$, $BC = BD$, 则下面说法正确的是 ().



- A. AB 垂直平分 CD B. CD 垂直平分 AB
C. AB 与 CD 互相垂直平分 D. CD 平分 $\angle ACB$

【备注】辨析题, 与图形结合, 按照判定解题即可

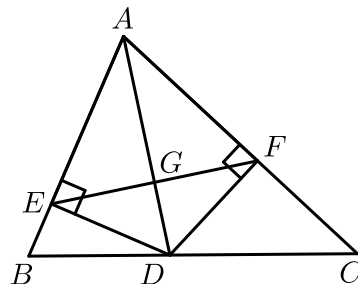
【答案】A

【解析】 $\because AC = AD$,
 $\therefore$ 点 A 在线段 CD 的垂直平分线上,
 $\because BC = BD$,
 $\therefore$ 点 B 在线段 CD 的垂直平分线上,
 $\therefore$ 直线 AB 是线段 CD 的垂直平分线,
故选A.

【标注】【知识点】线段的垂直平分线的判定定理

栗子12

15. 如图, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为 E 、 F , 连接 EF , EF 交 AD 于点 G . 求证: AD 垂直平分 EF .



【备注】角平分线与垂直平分线综合的解答题, 与13题对照, 性质与判定均可考察

【答案】证明见解析.

【解析】 $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$$\therefore \angle DAE = \angle DAF,$$

$$\text{又} \because AD = AD, \angle AED = \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ADF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = AF, DE = DF,$$

$\therefore$ 点 A 和点 D 在线段 EF 的垂直平分线上，

由两点确定一条直线，

$$\therefore AD \text{ 垂直平分 } EF.$$

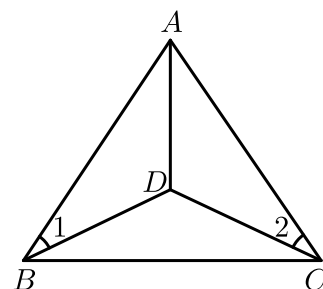
【标注】【知识点】线段的垂直平分线的判定定理

【知识点】角分线性质定理

【知识点】AAS

栗子13

16. 已知，如图 $\triangle ABC$ 中， $BD = DC$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，求证：



(1) AD 平分 $\angle BAC$.

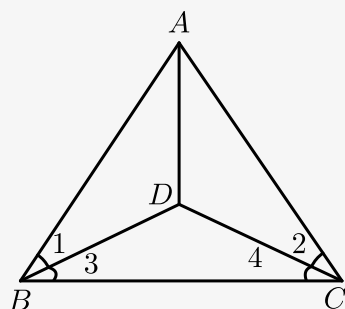
(2) $AD \perp BC$.

【备注】关键为识别出第二问考察的是求证 AD 为 BC 的垂直平分线

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) 如图所示，



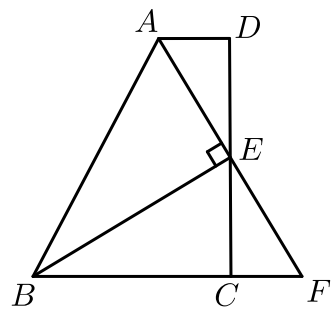
$\therefore BD = DC$,
 $\therefore \angle 3 = \angle 4$,
 又 $\therefore \angle 1 = \angle 2$,
 $\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$,
 即 $\angle ABC = \angle ACB$,
 $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形 ,
 $\therefore AB = AC$,
 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中 ,

$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AB = AC \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ (SAS)
 $\therefore \angle BAD = \angle CAD$,
 $\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$.

(2) $\therefore BD = DC$,
 $\therefore \angle DBC = \angle DCB$, 点 D 在 BC 的垂直平分线 ,
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$,
 $\therefore \angle ABC = \angle ACB$,
 $\therefore AB = AC$,
 $\therefore$ 点 A 在 BC 的垂直平分线 ,
 $\therefore AD$ 是 BC 的垂直平分线 ,
 即 $AD \perp BC$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

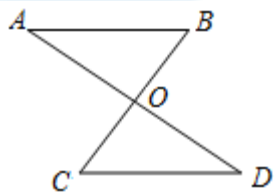
17. 如图 , 在四边形 $ABCD$ 中 , $AD \parallel BC$, E 为 CD 的中点 , 连接 AE 、 BE , $BE \perp AE$, 延长 AE 交 BC 的延长线于点 F . 求证 :



- (1) $FC = AD$.
 (2) $AB = BC + AD$.

【备注】

第一问可以利用平行线加中点模型推导全等



第二问考察垂直平分线的判定，可以铺垫和差倍分的题该如何考虑

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because AD \parallel BC$ (已知) ,

$\therefore \angle ADC = \angle ECF$ (两直线平行, 内错角相等) ,

$\because E$ 是 CD 的中点 (已知) ,

$\therefore DE = EC$ (中点的定义) .

$\therefore$ 在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle FCE$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle ADC = \angle ECF \\ DE = EC \\ \angle AED = \angle CEF \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE$ (ASA) ,

$\therefore FC = AD$ (全等三角形的性质) .

(2) $\because BE \perp AF$.

$\therefore \angle AEB = \angle FEB = 90^\circ$.

$\because \triangle ADE \cong \triangle FCE$.

$\therefore AE = FE, CF = DA$.

又 $BE = BE$.

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FBE$ (SAS) .

$\therefore AB = FB$.

$\therefore FB = BC + CF = BC + AD$.

$\therefore AB = BC + AD$.

【标注】 【知识点】 全等三角形的对应边与角